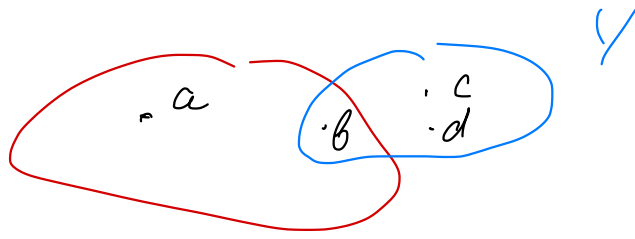


Chapitre 1. Nombres réels.

§1.1. Ensembles.

Ensemble = „Collection des objets définis et distincts“ G. Cantor

X



$$X = \{a, b\}$$

$$Y = \{b, c, d\}$$

Notations

$b \in Y \iff b$ appartient à Y (est un élément de Y)

$a \notin Y \iff a$ n'appartient pas à Y

$\forall \iff$ pour tout

$\exists \iff$ il existe

$Y \subset X \iff Y$ est un sous-ensemble de X

$Y \subset X \stackrel{\text{diff}}{\iff} \forall b \in Y \Rightarrow b \in X$

$Y \not\subset X \iff \exists b \in Y$ tel que $b \notin X$

$$Y = X \stackrel{\text{dét}}{\iff} Y \subset X \text{ et } X \subset Y$$

$$Y \neq X \iff Y \not\subset X \text{ ou } X \not\subset Y$$

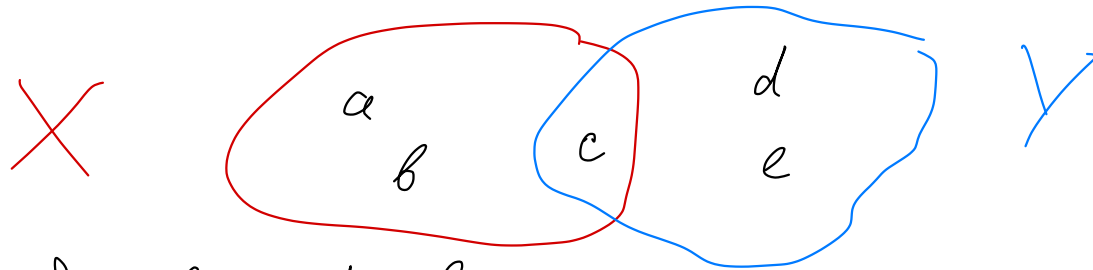
$\emptyset$ ensemble vide $\emptyset = \{\}$ $\Rightarrow \emptyset \subset X \forall X$; $X \subset X \forall X$

Supposons que les ensembles considérés sont sous-ensembles d'un ensemble universel U .

Opérations ensemblistes. Soient $X, Y, Z \subset U$

(1) Réunion: $X \cup Y \stackrel{\text{dét}}{=} \{a \in U \text{ tels que } a \in X \text{ ou } a \in Y\}$

Ex



$$X \cup Y = \{a, b, c, d, e\}$$

$$f \notin X \cup Y \iff f \notin X \text{ et } f \notin Y$$

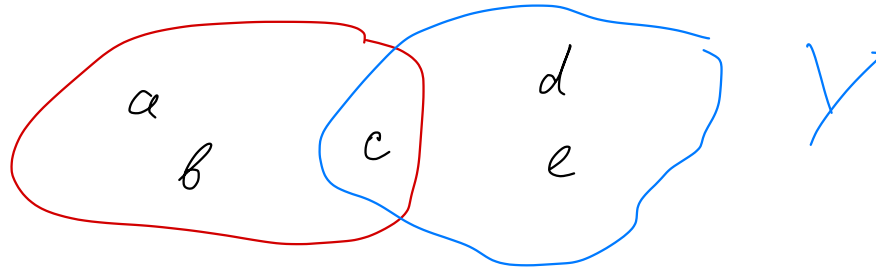
$$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$$

(2) Intersection $X \cap Y \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \mathcal{U} : a \in X \text{ et } a \in Y\}$

-15-

E_x

X



$$X \cap Y = \{c\}$$

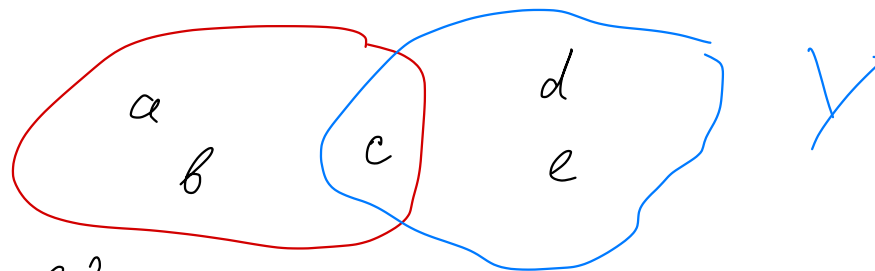
$$f \notin X \cap Y \Leftrightarrow f \notin X \text{ ou } f \notin Y$$

$$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$$

(3) Difference $X \setminus Y = \{a \in \mathcal{U} : a \in X \text{ et } a \notin Y\}$

E_x

X



$$X \setminus Y = \{a, b\}$$

$$Y \setminus X = \{d, e\}$$

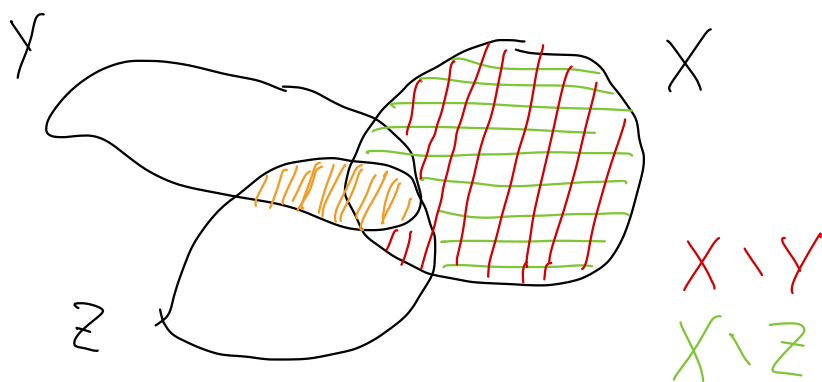
$$X \setminus Y \neq Y \setminus X \text{ en général}$$

-16-

Proposition $X, Y, Z \subset \mathcal{U}$. Alors $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$

Dém: A gauche : $\{a \in \mathcal{U} : a \in X \text{ et } a \notin (Y \cap Z)\} =$
 $= \{a \in \mathcal{U} : a \in X \text{ et } (a \notin Y \text{ ou } a \notin Z)\}$

A droite : $\{a \in \mathcal{U} : a \in (X \setminus Y) \text{ ou } a \in (X \setminus Z)\} =$
 $= \{a \in \mathcal{U} : (a \in X \text{ et } a \notin Y) \text{ ou } (a \in X \text{ et } a \notin Z)\} =$
 $= \{a \in \mathcal{U} : a \in X \text{ et } (a \notin Y \text{ ou } a \notin Z)\}$



fin de la démonstration 

$Y \cap Z$

$$X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$$

§ 1.2. Nombres naturels, rationnels, réels

-17-

Les nombres naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

avec „+“ et „·“ et relation d'ordre : on dit que $a \leq b$, $a, b \in \mathbb{N}$
 $\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N} : a + c = b$

Propriété de bon ordre : Tout sous-ensemble non-vide de $\mathbb{N}$ contient un plus petit élément
équivalentes si $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ soit $n=0$, soit n possède un unique antécédant ; mais récurrence implique toujours le bon ordre.

Propriété de récurrence : Soit $S \subset \mathbb{N}$ tel que

- (1) $0 \in S$
- (2) Si $n \in S \Rightarrow n+1 \in S$

} Alors $S = \mathbb{N}$

Les entiers relatifs : $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

$\forall x \in \mathbb{Z}$ possède un élément **opposé** par rapport à l'addition :

$$\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0$$

Notation : $y = -x$

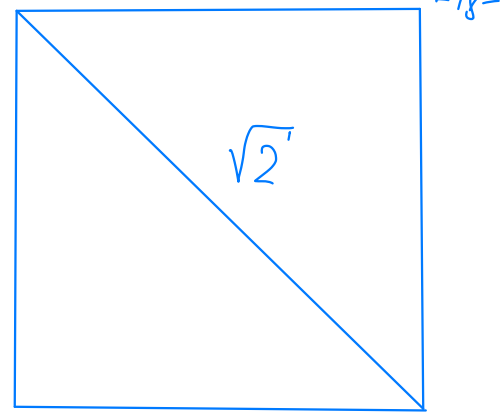
Les nombres rationnels : $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\} / \left(\frac{p}{q} = \frac{t}{s} \text{ si } p \cdot s = t \cdot q \right)$

$$\forall x \in \mathbb{Q} : x \neq 0 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{Q} : x \cdot y = 1$$

y est réciproque à x . Notation : $y = \frac{1}{x}$

§ 1.3. Nombres réels.

Proposition $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$: $(x = \sqrt{2} \Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x^2 = 2)$



Dém. par absurde:

Supposons que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$
tel que q est le plus petit possible $\leftarrow$ propriété de bon ordre

ex: $(\frac{18}{15} = \frac{6}{5} \Rightarrow p = 6, q = 5)$

Alors $2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2$ est pair $\Rightarrow p$ est pair

(Si $p = 2k+1 \Rightarrow p^2 = 4k^2 + 4k + 1$ impair) $\Rightarrow p = 2m$ pour $m \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 2q^2 = (2m)^2 \Rightarrow 2q^2 = 4m^2 \Rightarrow q^2 = 2m^2 \Rightarrow$ par le même argument

$\Rightarrow q$ est pair ! $\Rightarrow q = 2n$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$ $\leftarrow$ entiers non nuls

$\Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{2m}{2n} = \frac{m}{n}$ avec $0 < n < q$

$\Rightarrow$ absurde, contredit le choix de q le plus petit possible



Définition axiomatique de $\mathbb{R}$

(1) $\mathbb{R}$ est un corps : ensemble avec $+$, $\cdot$ satisfaisant les axiomes suivants :
 Pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$ on a :

- (.) $(x+y)+z = x+(y+z)$
- (.) $x \cdot y = y \cdot x$
- (.) $x+y = y+x$
- (.) $\exists 0 \in \mathbb{R} : x+0 = x$
- (.) $\exists 1 \in \mathbb{R} : 1 \neq 0 : x \cdot 1 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- (.) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x+y = 0$
- (.) $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1$
- (.) $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$
- (.) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

(2) $\mathbb{R}$ est un corps ordonné. $\exists$ une relation d'ordre $\leq$ tel que
 pour tout couple d'éléments $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

(.) $x \leq y$ ou $y \leq x$. Si $x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow x = y$
 Pour tout triple d'éléments $x, y, z \in \mathbb{R}$ on a

- (.) $x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z$
- (.) Si $x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$
- (.) Si $x \geq 0$ et $y \geq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq 0$.

Notation:

Si $x \leq y$ et $x \neq y \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} x < y$
 Si $x \geq y$ et $x \neq y \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} x > y$

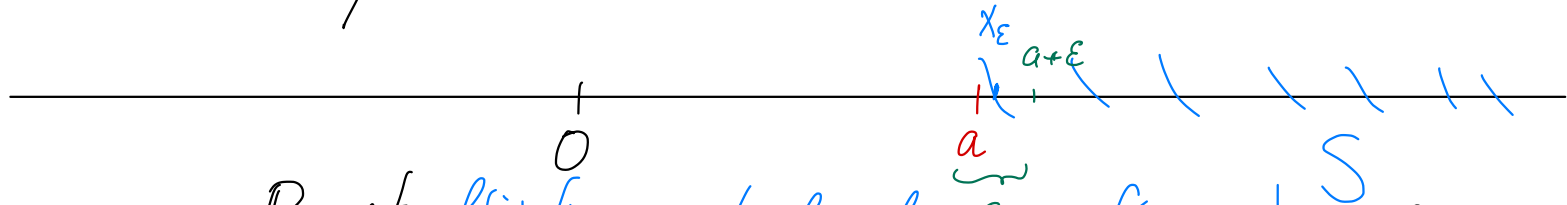
(3) Axiome de la borne inférieure

-20-

Pour tout sous-ensemble S non-vide de $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
il existe un nombre $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ tel que

$$(1) a \leq x \quad \forall x \in S$$

(2) Quel que soit $\varepsilon > 0$ il existe un élément $x_\varepsilon \in S$
tel que $x_\varepsilon - a \leq \varepsilon$ ($\Leftrightarrow a + \varepsilon \geq x_\varepsilon$)



On dit que $a \in \mathbb{R}$ est l'infimum (= la borne inférieure) de l'ensemble S .
Alors $\mathbb{R}$ est un corps commutatif, ordonné et complet.

Borne inférieure et supérieure

Déf Soit $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$. On dit que $b \in \mathbb{R}$ ($a \in \mathbb{R}$) est
un majorant (un minorant) de S si $\forall x \in S$ on a $x \leq b$ ($x \geq a$)

Si S admet un majorant (un minorant) alors S est majoré (minoré).

Si S est majoré et minoré, alors S est borné.

Déf. Soit S un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}$. Un nombre réel b (resp. a) vérifiant les propriétés suivantes:

(.) $\forall x \in S, x \leq b$ ($x \geq a$)

(.) $\forall \varepsilon > 0$ il existe un élément $x_\varepsilon \in S$ tel que $b - x_\varepsilon \leq \varepsilon$ ($x_\varepsilon - a \leq \varepsilon$)

est le $\left\{ \begin{array}{l} \text{supremum} \\ b = \sup S \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{infimum} \\ a = \inf S \end{array} \right.$ de S .

Ex $S = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}}$ $S \subset \mathbb{R}$. Clairement $0 < S \leq 1$

(1) $1 = \sup S$

(1) $1 \geq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ **Vrai**

(2) Soit $\varepsilon > 0$. Trouver $x_\varepsilon \in S : 1 - x_\varepsilon \leq \varepsilon$

On peut prendre $x_\varepsilon = 1$ pour tout choix de $\varepsilon > 0$ **Vrai**

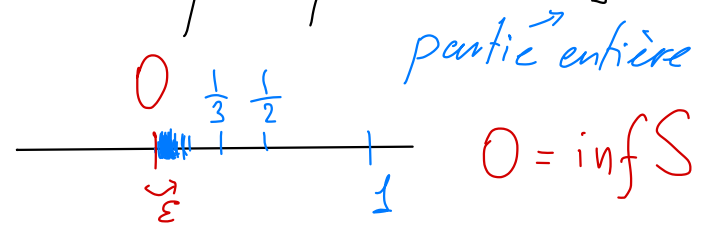
(2) $0 = \inf S$

(1) $0 \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ **Vrai**

(2) Soit $\varepsilon > 0$. Trouver $x_\varepsilon \in S : x_\varepsilon - 0 \leq \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ trouver $n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{n} \leq \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon > 0} n \geq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$

On peut prendre $\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 = n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon > \frac{1}{n} \in S$ **Vrai**



$\Rightarrow x_\varepsilon = \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1} \in S.$

